

洪谦论弗雷格的数的定义

2006年11月澳门“哲学交流与文化融合”会议论文

程炼 北京大学哲学系 100871

摘要：洪谦先生在《维也纳学派哲学》中对弗雷格的数的定义提出两项批评，本文重构和解释了洪谦的论证。本文的进一步分析表明，洪谦对弗雷格的批评是不能成立的。本文还指出，洪谦的错误来源于他对维也纳学派的核心原则——证实原则的不佳辨析的运用。

洪谦先生在中国传播西方哲学、尤其传播逻辑实证主义哲学的功劳，是世人皆知的。他早年的著作《维也纳学派哲学》¹为中国人了解维也纳学派，提供了不可多得的样品。其中有一篇小文章，题为“弗雷格、罗素与数理逻辑问题”，虽然不是对维也纳学派思想的直接介绍，但把这个学派的某些核心原理，在数学哲学方面作了一些应用。该文章分上下两个部分，分别批评了弗雷格关于数（基数）的定义、弗雷格和罗素的数理逻辑思想。在本文中，我将讨论这篇文章的上半部分对弗雷格的批评，我的讨论将指出这件样品中的一些瑕疵。我需要说明一点，尽管我对弗雷格的计划抱有同情心，但捍卫和推进他的计划是一回事，让他的计划免受由于曲解和错误引起的不该受到的批判，是另一回事。这篇短文所要做的，正是这个“另一回事”。

大概是由于条件艰苦、资料匮乏，洪谦那一辈的先生们写文章，很少将引证的观点和参考文献标清楚。这一点上，我们当然不能苛求。在我要讨论的这一部分，洪谦只花了不到四个印刷页来严厉指责弗雷格的数的定义。在进入具体讨论之前，我有一个感触。洪谦写作这篇文章的上世纪40年代，一般中国读者，甚至包括哲学专业人士，是不太可能接触到弗雷格的文献的，无论是原作还是译本。但是，洪谦的评论文章，即使今天让熟悉弗雷格思想的人来阅读，他们也会发现对弗雷格观点的铺呈是不够的。洪谦在短短的篇幅中夹叙夹议，一方面，弗雷格思想的原貌没有得到反映，另一方面，弗雷格的工作，不像维也纳学派哲学那样得到同情性的诠释。这造成的一个印象是，洪谦的批判大都显得突兀和剧烈。洪谦文章的另一个特点是，它的主旨是纯批判性的。由于从文章中看不出他在相关问题上的正面想法，这也让读者不明白洪谦的批判要达到什么目的。因此，为了理解和评价洪谦对弗雷格的批评，我在我认为必要的地方做了一些展开。

弗雷格的数学哲学体现了一种“基础思维”（foundational thinking），基础思维的意思是，数学这门学问还不够基本，它能够被简约到更基础的学问上；逻辑是最为稳妥的基础，一旦数学被还原为逻辑，变成一门逻辑分支，数学基础就确定了。弗雷格的奠基工作从数学的一个子部分——算学做起。弗雷格关于算学的观点包含下面三个想法：（1）数与概念的联系；（2）个体数作为对象；（3）算学作为逻辑的延伸。

在评论弗雷格计划的哲学文献中，关于第一个想法的讨论相对较少。第二个想法引起了复杂的形而上学和认识论争论，如数是什么样的对象？如果数被理解为某种抽象实体

（abstract entities），人类心灵如何认识这些抽象事物以及它们之间的规律？第三个想法涉及由罗素悖论引起的非常技术性的问题。洪谦的批评则完全从弗雷格的第一个想法——即数的定义上下手，对哲学味道更浓的后两个想法丝毫没有触及。

¹ 1945年初版，1989年由商务印书馆重印，本文引用的是重印本。

弗雷格算学哲学的第一个想法得到较少关注，主要是因为弗雷格是在非常特殊的意义上使用“概念”这个概念的。一旦弗雷格的使用得到澄清，人们普遍觉得如何将数赋予一个更具体事物还是赋予更一般的类或概念的问题，对于弗雷格的奠基工作而言，并不是至关重要的。² 简言之，弗雷格的数的定义包含两个步骤，首先借助休谟原则定义等数类或等数概念，然后将一个个体数定义为与某个类等数的类的类。就对基数的定义而言，弗雷格的做法既不是唯一的，也不是最流行的，更谈不上是最经济的、最简洁的，例如冯·诺依曼和蒯因就各有不同的定义法。不过，弗雷格的定义的独特之处是，他认为他的数的定义使用的是严格的逻辑概念。这一点将他的逻辑主义纲领与其他为数学寻找基础的尝试（如今天最流行的集合论的数学基础）区分开来。

一般而言，评价一个定义的好坏是有若干元标准的。一个坏的定义通常至少具有下述特点之一：（1）循环的；（2）不精确的；（3）啰嗦的或不必要地复杂的；（4）带来坏结果的（如自相矛盾或导致悖论）。至少在定义基数的初始阶段，弗雷格并未触犯这些标准。或许弗雷格定义在简洁性上有疑问，但只要保留他的逻辑主义纲领的前提，任何简化的定义都是受欢迎的，因而弗雷格的计划并不受到什么冲击。有趣的是，洪谦并未用这些定义标准中的任何一个来找弗雷格的碴儿，在对弗雷格定义的批评中，他反复运转使用的似乎是维也纳学派的嫡传家法——证实原则。

弗雷格的第一个步骤是定义两个概念之间的等数性。弗雷格的概念相当于素朴类，即任何一个类都被其成员所封闭。这意味着对一个类而言，它有确定的成员数，对一个相关联的概念而言，一个个体对象是否落在这个概念之下是有明确答案的。根据休谟原则³，两个类是等数的，当且仅当两个类的成员之间以某种方式呈一一对应关系。我们先看洪谦对弗雷格定义的第一个步骤——对等数性的刻画——的批评：

“弗雷格曾告诉我们——两个群是否为相等数，是以它们有无一对一的关系为标准。这样的两个相等数的群的定义在理论上是正确的，可惜弗雷格并没有想到命题意义与证实方法的关系，因此它不能得到实际上的作用。虽然弗雷格在他的定义中已经说出两个相等数的群的证实特征，这两个群的一对一的关系，但并未指出如何达到这个特征的方法，所以它仅是一种对于两个相等数的群命题的一种说法，而不是教我们如何得到两个相等数的群命题的意义标准。”⁴

洪谦的这段评论非常令人费解。他先说弗雷格对等数类的定义在理论上是正确的。“在理论上”是什么意思？在哪个理论上？这里我所能想到的只有两种可能的解释。一种解释是，洪谦认为休谟原则是一个逻辑命题，或者至少是一个近于逻辑的命题，因此这个原则“在理论上”是正确的。但是，这种解释跟他持有的逻辑实证主义观点有抵牾，这是因为，洪谦在接下来的评论中说休谟原则“不能得到实际上的作用”、没有“教我们如何得到两个像等数的群命题的意义标准”。根据标准的逻辑实证主义的逻辑观，逻辑命题是有意义的，但它们是不言说世界的“套套言”（*tautology*，也称“同语反复”），不是通过经验来证实的，因而不满足另一类有意义命题——经验命题的意义标准。倘若洪谦认为休谟原则是逻辑命题或者准逻辑命题，那么他后面的话就是多余的。因此，洪谦后面的评论否定了他认为等数性定义是逻辑命题的解释。

² 参见Charles Parsons, “Frege’s Theory of Number”, in Charles Parsons, *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*, Ithaca, New York: Cornell University Press, 1983, p.151

³ Gottlob Frege, *The Foundations of Arithmetic*, English translated by J. L. Austin, Second Revised Edition, Evanston, Illinois: Northwestern University Press, 1980, p.73.

⁴ 洪谦,《维也纳学派哲学》,北京:商务印书馆,1989年4月第1版,第142页。“群”相当于“类”。下同。

第二种可能的解释是，等数性定义是直观上有效的非逻辑命题。这种解释要求我们不要把“理论上是对的”看得太重。按这种解释，或许洪谦的真正意思是，弗雷格的等数性定义尽管“看起来”是正确的，“直观上”是对的，但由于弗雷格没有给出证实方法，因而可能是、或者接近于无意义的“伪命题”。洪谦“可惜弗雷格并没有想到命题意义与证实方法的关系”，殊不知，弗雷格出版《算学基础》的时候（1884年），提出意义的证实原则的洪谦的恩师石里克还是刚学会走路的两岁儿童。若弗雷格有未卜先知的本事，维也纳学派怕是要斩掉首字，成为“也纳（Jena）学派”了。

或许，洪谦只是指责弗雷格**没有**给出证实两个类等数的方法，而不是指责他**不可能**给出这种证实方法。我认为任何人站在弗雷格的角度都不可能满足洪谦的要求，这是因为弗雷格类在辖域上没有限制，一个类的成员可以是抽象对象，也可以是物理对象、甚至心理对象，还可以是其他类。更重要的是，弗雷格的等数性定义只要求等数类的存在，不要求如何将等数类构造出来，不管是用那种方法。正是在这一点上，洪谦误解了弗雷格的工作。正是由于这种误解，洪谦才过分使用了证实原则。理由如下。

弗雷格的休谟原则是用一个双向条件句来表述的：

(HP) 对于任意两个类F和G，F等数于G，当且仅当，F的成员在某种关系上与G的成员呈一一对应关系。

用公式表达就是

$$(\forall F)(\forall G)[(Nx:Fx = Nx:Gx) \leftrightarrow (F1-1G)]$$

现在，让F和G以洪谦所举的例子“教室A内的桌子”和“教室B内的椅子”来分别代入，我们得到：

(E1) 类[教室A内的桌子]等数于类[教室B内的椅子]，当且仅当，教室A内的桌子和教室B内的椅子呈一一对应关系。

洪谦说，若我们要证实教室A内的桌子与教室B内的桌子呈一一对应关系，必须用某种方式（如在每张桌子旁边放一把椅子）来确立这种关系，而这种关系一定是一种事实关系，不是逻辑关系。因此，他说，

“（一）两个群的互相关系是不存在的；在我们未树立课室A与B内的桌子与椅子一对一的关系以前，则根本无法知道它们的关系是怎样的。因此：

（二）两个群是否为相等数不能从它们的互相并列性推论之，非事前知道它们实际的关系是怎样，因此我们如不知道所指示的桌子与椅子一对一的关系，我们怎样知道在一张桌子之旁分列一张椅子呢？”⁵

洪谦的意思是，“教室A内的桌子和教室B内的椅子呈一一对应关系”是一个经验命题，我们若不能将这些桌子和椅子一一对列，便不可知道两者的一一对应关系。这一点没错，弗雷格也不会否认。但是，洪谦的攻击没有打在靶子上。理由是，弗雷格认为，两个类的等数性**先天地**等价于两个类的成员之间的一一对应关系，而洪谦只是表明（许多）一一对应关系是后天的，需要通过经验证实的。当然，如果弗雷格的先天等价是成立的话，那么（许多）等数性也是后天的，需要通过经验证实的。弗雷格认为休谟原则是一条自明的原则，换句话说，人人都能看出这条原则为真。洪谦的批评是，判断双向条件句的两个从句中的任何一个的真值，都需要某种证实方法。这一点弗雷格或许并不表示反对，也没有必要去反对，但这并不意味着确定整个句子的真值都需要某种证实方法。现在的问题是，两个经验事实，一个关于等数性，一个关于一一对应关系，它们之间的等价性一定是经验的或后天的吗？当然不是，即使全盘接受逻辑实证主义的证实原则。看：

⁵ 《维也纳学派哲学》，第141页。

(E2) 张三是单身汉，当且仅当，张三是未婚男人。

(E2)的两个子句都是经验命题，但整个句子，按照逻辑实证主义的招牌说法，是依据意义为真的分析命题。在这个意义上，(HP)和(E1)都可能是分析命题，不需要证实原则来确立真值的命题。因此，洪谦对弗雷格的等数性定义的指责是不成立的。关于(HP)的逻辑特征，当代有大量的争论。有些人，如当代一些新弗雷格主义者，认为它是一个有自明性的分析命题，后者是一条逻辑原则；有人不满意将算学还原为(HP)加二阶逻辑，这些超出了我的讨论范围。

我大胆做出一个推测，一个在我看来很有道理的推测。从洪谦对弗雷格的批评看，他可能不自觉地持有这样一个原则，我把它称为“有意义性的复合原则”：

一个复合命题是有意义的，仅当，该命题的每个子命题是有意义的。

在维也纳学派看来，由于（对于经验命题而言）有意义性必须归结为可证实性，因此，上面的原则可以蕴含着下面的原则：

一个复合命题是可证实的，仅当，该命题的每个子命题都是可证实的。

洪谦似乎是借用这个原则或者某个类似的东西来攻击弗雷格的。他强调，概念或类之间的等数关系，以及概念或类之间的其他关系，有一些是依定义成立，如“A属于A·K·班”，有一些建立在经验知识的基础上，如“鲸鱼属于哺乳动物”。前一类关系是同语反复，后一类“从纯粹逻辑立场是无法推论的”⁶。依据上面的原则，他的想法好像是，如果一个复合命题的某个子命题不是同语反复，那么整个复合命题也不是同语反复。用在弗雷格身上，情况就是这样的：休谟原则说，概念[教室A中的桌子]等数于概念[教室B中发椅子]，当且仅当，教室A中的桌子与教室B中的椅子可以以某种方式一一对应；既然后者是需要经验方法来证实的，那么整个双向条件句就不再是一个同语反复。但意义的复合原则显然是错误的，因为“今天或者下雨，或者没有下雨”的确是一个同语反复，但它的任何一个子部分都是经验判断，就像上面的命题E2一样。从这里，我们可以看出，洪谦对弗雷格的第一个批评，是有错误的根源的。

洪谦对弗雷格的数的定义的第二个批评集中在弗雷格的第二个步骤——将数定义为等数类的类——上。他说，

“此外弗雷格的‘单群之数’的定义，也不是无逻辑的缺点。弗雷格认为个数为一种类的类。譬如说‘桌子上有三个苹果’，为数字3相似的类，如同我们左手五指能为数字5相似的类一样。不过弗雷格所不能想到的，我们的语言不是为句子形式独能支配，此外有一种语言在这个形式之外，而自有其意义，这就是所谓命令式的语言。我们能从‘桌子上有三个苹果’、我们左手的五指当作数字3与5相似的类，或者‘三之类’‘五之类’的成分，可是不能从三个苹果中而构成数字3的概念，因为这句话的意义不在于‘三个苹果’，仅在于命令某人拿三个苹果来而已。总之弗雷格的定义是以主宾词的句子形式为基础，但不知这样形式的语言是没有普遍的表达可能性的，这一点自经罗素说明以后，似已不成问题了。”⁷

⁶ 《维也纳学派哲学》，第142页。

⁷ 《维也纳学派哲学》，第143页。

这段评论中包含两个子评论，但在我看来它们都没有说出弗雷格数的定义的“逻辑缺点”。第一个评论说，弗雷格的定义没有照顾到祈使句的意义。诚然，弗雷格的任务之一就是揭露日常语言以及科学语言中数词或数字表达式的逻辑特性，例如他说“一个包含数的陈述的内容是对一个概念的断言”⁸。但我们不必将弗雷格的计划理解为对一切含有数的表达式的逻辑分析。在自然语言中，许多貌似陈述句的表达式，如某个场合下说出的“桌子上有三个苹果”，“你兜里有100块钱”，实际上是祈使句，意思是“把苹果递过来”、“你付钱吧”。分析这些句子的特点，是语用学的任务。弗雷格没有直接处理这些题目，并不是他的理论的直接的逻辑缺陷，就像量子力学不说明经济规律不是量子力学的理论缺陷一样。洪谦的第二个评论说弗雷格的定义是以主宾结构的句式为基础，我遗憾地没有找到对这个评论的文本支持。实际上，早在1879年出版的第一部著作《概念文字》中，弗雷格就明确提出用函数-主目分析替代传统的主词-谓词分析的主张，这个主张在后来的论函数与对象的关系中得到重要发展，成为弗雷格的本体论的基石。

在完成前面几个对弗雷格的批评之后，洪谦在论文这一部分的结尾讲到罗素悖论的发现和弗雷格计划的失败，最后，他不无自豪地说，“假如弗雷格当时就发觉本文所指出他的数的定义所包含的缺点，那么他等不到罗素的警告之后，便早已对于他的‘数理哲学’持消极态度了。”⁹我想，单从我上面对他的论证的分析看，洪谦先生的自豪当是为了在当时的抗战年代起到鼓舞人心士气的作用。解释或许只能是这样的：洪谦爱证实原则，爱心太切，以至于不加辨析地运用它。

⁸ *The Foundations of Arithmetic*, p.59.

⁹ 《维也纳学派哲学》，第143页。